UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA AEROSPAZIALE – D.I.A.S.

STATISTICA PER L'INNOVAZIONE

a.a. 2007/2008

TRASFORMAZIONI DI VARIABILI ALEATORIE

TVE: Gumbel dei valori minimi

Modello Weibull

Prof. Antonio Lanzotti

A cura di: Ing. Andrea Colini

andrea.colini@unina.it

Trasformazioni di Variabili Aleatorie

Una variabile casuale X può essere trasformata mediante una funzione $g(\cdot)$ per definire una nuova variabile casuale

$$\boldsymbol{Y = g(X)} \qquad \text{detta “}\textit{Trasformata}\text{” della } X$$

Questa relazione esprime il fatto che, quando la v.a. X assume il valore x la v.a. Y assumerà il valore $y = g(x)$

Indicando con:

$f_X(x)$ la funzione densità di probabilità (pdf) della v.a. X

la funzione densità di probabilità (pdf) della v.a. Y, $f_Y(y)$ verrà determinata dalla trasformazione $g(\cdot)$ e dalla densità $f_X(x)$ di X

Variabili aleatorie Discrete

Se X è una variabile aleatoria discreta con punti di massa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ allora la distribuzione di $Y = g(X)$ si determina direttamente dalle leggi di probabilità

$$x_1 \to f_X(x_1)$$
$$x_2 \to f_X(x_2)$$
$$\ldots$$
$$x_n \to f_X(x_n)$$

I valori possibili di Y vengono determinati sostituendo i diversi valori di X in $g(\cdot)$

ESEMPIO:

$$Y = g(X) = (X-2)^2$$

$$1 \to f_X(1) = \Pr\{X = 1\} = \frac{1}{6}$$
$$2 \to f_X(2) = \Pr\{X = 2\} = \frac{1}{6}$$
$$3 \to f_X(3) = \Pr\{X = 3\} = \frac{1}{6}$$
$$4 \to f_X(4) = \Pr\{X = 4\} = \frac{1}{6}$$
$$5 \to f_X(5) = \Pr\{X = 5\} = \frac{1}{6}$$
$$6 \to f_X(6) = \Pr\{X = 6\} = \frac{1}{6}$$

$$X = 1 \to Y = 1$$
$$X = 2 \to Y = 0$$
$$X = 3 \to Y = 1$$
$$X = 4 \to Y = 4$$
$$X = 5 \to Y = 9$$
$$X = 6 \to Y = 16$$

$$f_Y(0) = \Pr\{Y = 0\} = \Pr\{X = 2\} = f_X(2) = \frac{1}{6}$$
$$f_Y(1) = f_X(1) + f_X(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$
$$f_Y(4) = f_X(4)$$
$$f_Y(9) = f_X(5)$$
$$f_Y(16) = f_X(6)$$

Variabili aleatorie Continue (1)

Supponendo che la $g(\cdot)$ sia tale da stabilire una corrispondenza biunivoca tra X e Y avremo due possibili situazioni:

- $g(\cdot)$ strettamente crescente

L'evento $E = \{Y \leq y\}$ si verifica quando si verifica $E_0 = \{X \leq x\}$; risultando così uguali le relative probabilità:

$$Pr\,\{Y \leq y\} = F_Y(y) = Pr\,\{X \leq x\} = F_X(x); \qquad x = g^{-1}(y)$$

Da cui derivando rispetto a y, otteniamo la corrispondente "densità" della Y:

$$f_Y(y) = f_X(x)\frac{dx}{dy}; \qquad \frac{dx}{dy} > 0$$

- $g(\cdot)$ strettamente decrescente

L'evento $E = \{Y \leq y\}$ si verifica quando si verifica $E_0 = \{X > x\}$; risultando così:

$$Pr\,\{Y \leq y\} = F_Y(y) = Pr\,\{X > x\} = 1 - F_X(x); \qquad x = g^{-1}(y)$$

Da cui derivando rispetto a y, otteniamo la pdf di Y:

$$f_Y(y) = f_X(x)\left(-\frac{dx}{dy}\right); \qquad \frac{dx}{dy} < 0$$

Variabili aleatorie Continue (2)

Unendo i due risultati precedenti otteniamo:

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

*Sempre nell'ipotesi in cui $g(\cdot)$ stabilisca una corrispondenza biunivoca tra X e Y

Dove:

$$X = \{x : f(x) > 0\}$$

$g^{-1}(y)$ è la funzione inversa di $g(x)$

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{d(g^{-1}(y))}{dy}$ è continua e diversa da zero

Esempio

Ex: Supponiamo che X abbia una distribuzione Esponenziale.
Qual è la distribuzione di $Y = X^2$?

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \quad \text{quando } x \geq 0$$
$$= 0 \qquad \text{altrove}$$

Poiché:

$$x = y^{1/2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \cdot y^{(1/2)-1}$$

Segue:

$$f_Y(y) = f_X\left[x = \sqrt{y}\right]\left|\frac{dx}{dy}\right| = \lambda \exp(-\lambda\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2} \cdot y^{(1/2)-1}$$

definita ovviamente per $y \geq 0$

v.a. Continue – GUMBEL DEI VALORI MINIMI

Supponiamo che X abbia una distribuzione Esponenziale. Qual è la distribuzione di $Y = a + b\ln(\lambda X)$?

La v.a. risultante è detta Gumbel "dei valori minimi" ed ha Cdf:

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \quad \text{quando } x \geq 0 \qquad F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$$

$$\frac{y-a}{b} = \ln(\lambda x) \rightarrow x = \frac{1}{\lambda}\exp\left(\frac{y-a}{b}\right) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{d(g^{-1}(y))}{dy} = \frac{1}{\lambda}\exp\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{b}$$

$$f_Y(y) = f_X\left[x = \frac{1}{\lambda}\exp\left(\frac{y-a}{b}\right)\right]\frac{1}{\lambda}\exp\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{b} = \frac{1}{b}\exp\left[\left(\frac{y-a}{b}\right) - \exp\left(\frac{y-a}{b}\right)\right]$$

$$F_Y(y) = \int_0^y f_Y(y)dy = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{y-a}{b}\right)\right] \qquad -\infty < x < \infty, \beta > 0$$

v.a. Continue – WEIBULL

Supponiamo che X abbia una distribuzione Gumbel dei valori minimi. Qual è la distribuzione di $Y = \exp\left[X\right]$?

$$f_X(x) = \frac{1}{b}\exp\left[\left(\frac{x-a}{b}\right) - \exp\left(\frac{x-a}{b}\right)\right] \qquad F_X(x) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$y = \exp(x) \rightarrow x = \ln(y) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{d(g^{-1}(y))}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$f_Y(y) = f_X\left[x = \ln(y)\right]\frac{1}{y} = \frac{1}{b}\exp\left[\left(\frac{\ln(y)-a}{b}\right) - \exp\left(\frac{\ln(y)-a}{b}\right)\right]$$

$$f_Y(y) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right]^{\beta} \qquad \beta = \frac{1}{b}, \alpha = \exp(a)$$

Modello Weibull

La trasformazione generalmente indicata con $W = e^{Z_m}$

Della v.a. Gumbel Z_m dei valori minimi, definisce la v.a. Weibull W.

Il parametro α è detto "di posizione" e β "di forma" (per β=1 la Weibull coincide con l'Esponenziale)

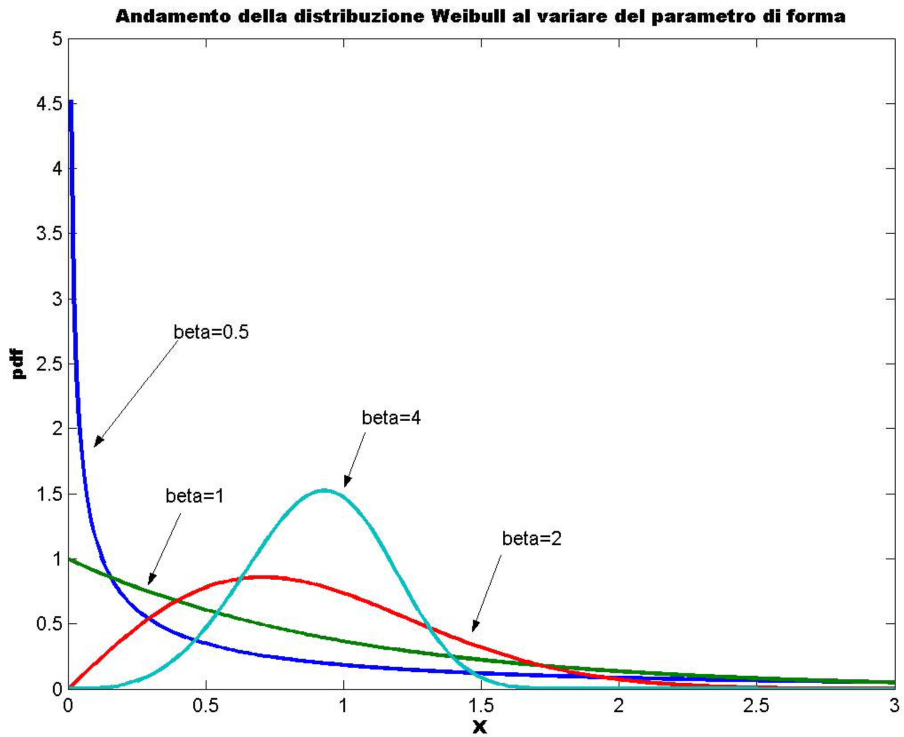
$$f_Y(y) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right]^{\beta} \qquad \beta = \frac{1}{b}, \alpha = \exp(a)$$

Modello Weibull

α parametro di posizione

β parametro di forma

$$F_Y(y) = \int_0^y f_Y(y)dy = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta}\right]$$



L’ampia gamma di forme della pdf garantite dal parametro β ha garantito l’enorme successo di tale modello, soprattutto in campo affidabilistico.

$$f_Y(y) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right]^{\beta} \qquad \beta = \frac{1}{b}, \alpha = \exp(a)$$

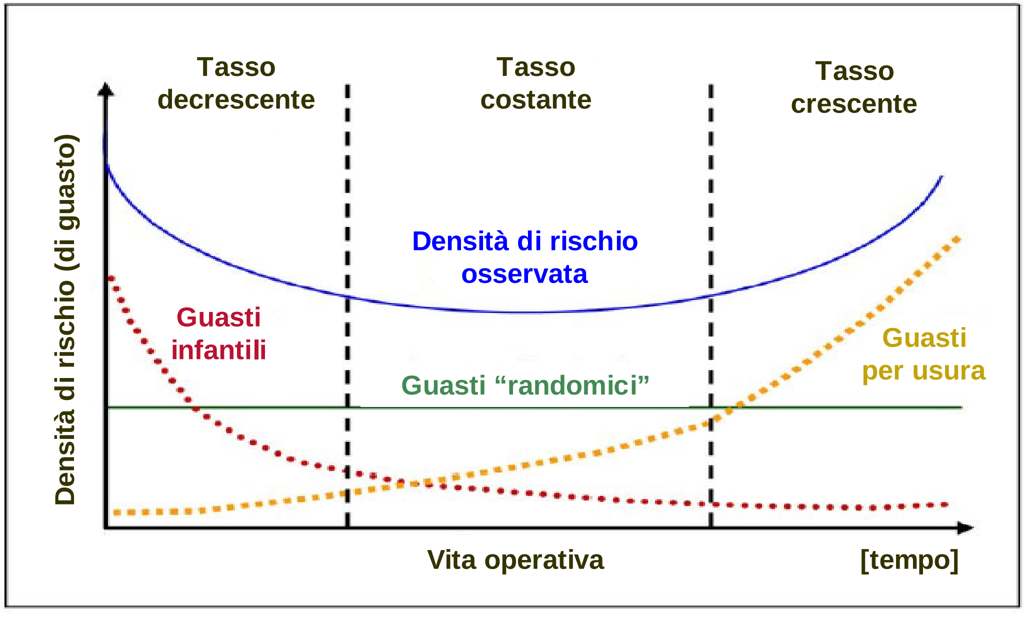
Modello Weibull - Applicazioni

La Weibull è un modello matematico molto utilizzato in studi di interesse affidabilistico, infatti permette di descrivere tutti i tratti della curva a vasca da bagno che caratterizza la vita di un componente, a seconda del valore del suo parametro di forma :

$0 < \beta < 1$ → **il meccanismo di guasto del processo è dovuto a difetti di fabbricazione;**

$\beta = 1$ → **il meccanismo di guasto del processo è dovuto a difetti randomici o accidentali;**

$\beta > 1$ → **il meccanismo di guasto del processo è dovuto ad usura.**



Riferimenti sul Libro

Pasquale Erto
"Probabilità e statistica per le scienze e l'ingegneria"
***McGraw Hill* – seconda edizione**

- **Capitolo 3**

  Trasformazioni di variabili aleatorie § 3.5 – pagg. 55-63

  Metodo dei minimi quadrati § 3.9.1 – pagg. 70-73

- **Capitolo 5**

  Modelli Gumbel e Weibull § 5.2.1 – pagg. 94-98

- **Capitolo 9**

  Metodo dei grafici di probabilità § 9.1.3 – pagg. 185-189

Per eventuali comunicazioni:

giovanna.matrone@unina.it
antonio.lepore@unina.it
andrea.colini@unina.it

Orario di ricevimento:

Giovedì ore 16:30-18:30
P.le Tecchio X piano
Stanza Dottorandi DIAS