



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II**

---

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA AEROSPAZIALE – D.I.A.S.**

---

**STATISTICA PER L'INNOVAZIONE**

a.a. 2007/2008

---

**ANALISI DELLA VARIANZA  
A DUE VIE CON INTERAZIONE**

Prof. Antonio Lanzotti

A cura di: Ing. Giovanna Matrone

[giovanna.matrone@unina.it](mailto:giovanna.matrone@unina.it)



# La durata della batteria di un componente meccanico

---

Un ingegnere è stato coinvolto nella progettazione di una batteria per un dispositivo meccanico che sarà soggetto, durante il suo funzionamento, a brusche variazioni di temperatura.

L'unico parametro di progetto su cui può intervenire in questa fase di progettazione è il materiale da utilizzare per la piastra della batteria, sapendo che per essa potrà sperimentare tre diverse alternative di scelta.

Quando la batteria sarà montata sul dispositivo e messa in uso, l'ingegnere non potrà controllare le escursioni termiche affrontate dalla batteria. Tuttavia, l'esperienza gli suggerisce che la temperatura prevedibilmente influenzerà la durata della batteria.

L'ingegnere decide, quindi, di effettuare una sperimentazione nel laboratorio di sviluppo prodotto per comprendere gli effetti della temperatura sulla *durata*.



# ANOVA a due vie con interazione: lo schema

A Parametro di progetto



B Parametro di blocco



**DURATA**

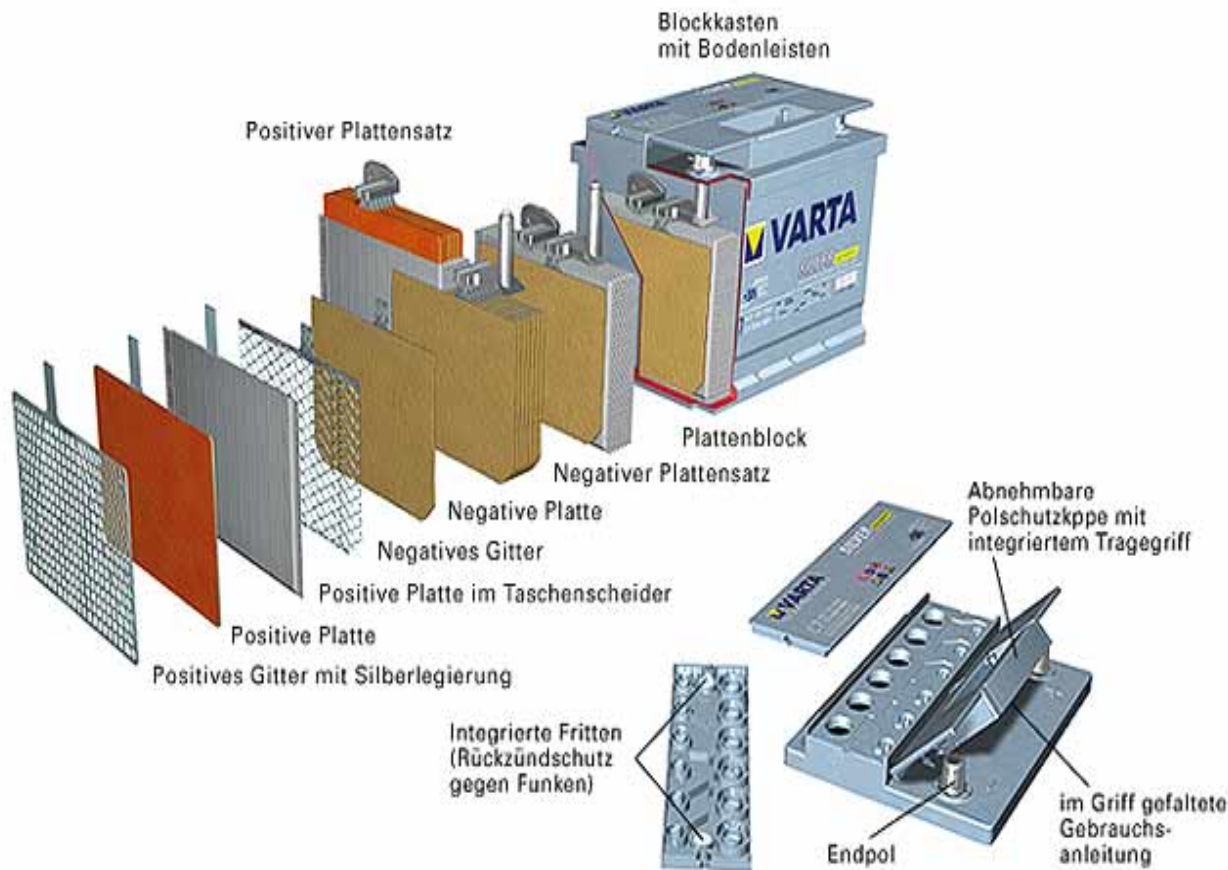
Fattore	A	Tipo di materiale
Livelli	A <sub>1</sub>	Materiale 1
	A <sub>2</sub>	Materiale 2
	A <sub>3</sub>	Materiale 3

Fattore	B	Temperatura operativa
Livelli	B <sub>1</sub>	15°F
	B <sub>2</sub>	70°F
	B <sub>3</sub>	125°F



# ANOVA a due vie con interazione: le prove

## Aufbau einer Varta Silver dynamic-Batterie



Test su 4 batterie per ogni  
combinazione dei 3 livelli di  
temperatura e 3 tipi di  
materiale per la piastra



Sperimentazione completa di  
2 fattori a 3 livelli ciascuno  
con 4 replicazioni



# prove:

$$3^2 \times 4 = 36$$



# Analisi della varianza a due vie con interazione

---

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, b ; k = 1, \dots, c$$

$\mu$  media globale

$\alpha_i$  effetto imputabile al primo fattore in esame al livello i-esimo

$\beta_j$  effetto imputabile al secondo fattore in esame al livello j-esimo

$(\alpha\beta)_{ij}$  effetto imputabile all'interazione tra i 2 fattori

$\varepsilon_{ijk}$  componente casuale di errore



# Analisi della varianza a due vie con interazione

## Test di ipotesi

$$H_0 = \{\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0\}$$

$$H_1 = \{\alpha_i \neq 0 \text{ per almeno un } i\}$$

$$H_0 = \{\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0\}$$

$$H_1 = \{\beta_j \neq 0 \text{ per almeno un } j\}$$

$$H_0 = \{(\alpha\beta)_{ij} = 0, \forall i, j\}$$

$$H_1 = \{(\alpha\beta)_{ij} \neq 0 \text{ per almeno un } i \text{ o } j\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \\ x_{ij} \sim N(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}, \sigma^2) \\ (\alpha\beta)_{ij} = E\{\bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{\cdot j\cdot}\} - E\{\bar{x}_{i\cdot\cdot} - \mu\} = E\{\bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{i\cdot\cdot}\} - E\{\bar{x}_{\cdot j\cdot} - \mu\} \end{array} \right.$$



# ANOVA a due vie con interazione: residui

$$e_{ijk} = \hat{\varepsilon}_{ijk} = x_{ijk} - \hat{x}_{ijk} = x_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \left(\widehat{\alpha\beta}\right)_{ij}$$

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\alpha_i = E \left[ \bar{x}_{i\bullet\bullet} - \bar{x} \right] \longrightarrow \hat{\alpha}_i = \bar{x}_{i\bullet\bullet} - \bar{x}$$

$$\beta_j = E \left[ \bar{x}_{\bullet j\bullet} - \bar{x} \right] \longrightarrow \hat{\beta}_j = \bar{x}_{\bullet j\bullet} - \bar{x}$$

$$\left\{ \begin{aligned} (\alpha\beta)_{ij} &= E \left[ \bar{x}_{ij\bullet} - \bar{x}_{\bullet j\bullet} \right] - E \left[ \bar{x}_{i\bullet\bullet} - \mu \right] = \\ &= E \left[ \bar{x}_{ij\bullet} - \bar{x}_{i\bullet\bullet} \right] - E \left[ \bar{x}_{\bullet j\bullet} - \mu \right]; \\ \left(\widehat{\alpha\beta}\right)_{ij} &= \left( \bar{x}_{ij\bullet} - \bar{x}_{\bullet j\bullet} \right) - \left( \bar{x}_{i\bullet\bullet} - \bar{x} \right); \end{aligned} \right.$$

$$e_{ijk} = x_{ijk} - \bar{x}_{ij\bullet}$$



# ANOVA a due vie con interazione: la tabella

$n$  Livelli del fattore principale A sotto studio

$b$  Livelli del fattore secondario B

$c$  Numero di replicazioni

Origine varianza	Somma dei quadr. degli scarti	gdl	s.q.m.
Fattore principale	$bc \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{i\bullet\bullet} - \bar{x})^2$	$n-1$	$\frac{bc \sum_f}{n-1}$
Fattore secondario	$nc \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{\bullet j\bullet} - \bar{x})^2$	$b-1$	$\frac{nc \sum_b}{b-1}$
Interazione	$c \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b (x_{ij\bullet} - \bar{x}_{i\bullet\bullet} - \bar{x}_{\bullet j\bullet} + \bar{x})^2$	$(n-1)(b-1)$	$\frac{c \sum_i}{(n-1)(b-1)}$
Errore	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (x_{ijk} - \bar{x}_{ij\bullet})^2$	$nb(c-1)$	$\frac{\sum_e}{nb(c-1)}$
Totale	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c (x_{ijk} - \bar{x})^2$	$nb(c-1)$	$\frac{\sum_{tot}}{nb(c-1)}$





# ANOVA a due vie con interazione: le prove

Durate della batteria in [h]

Osservazioni												
	B1				B2				B3			
A <sub>1</sub>	130	155	74	180	34	40	80	75	20	70	82	58
A <sub>2</sub>	150	188	159	126	136	122	106	115	25	70	58	45
A <sub>3</sub>	138	110	168	160	174	120	150	139	96	104	82	60

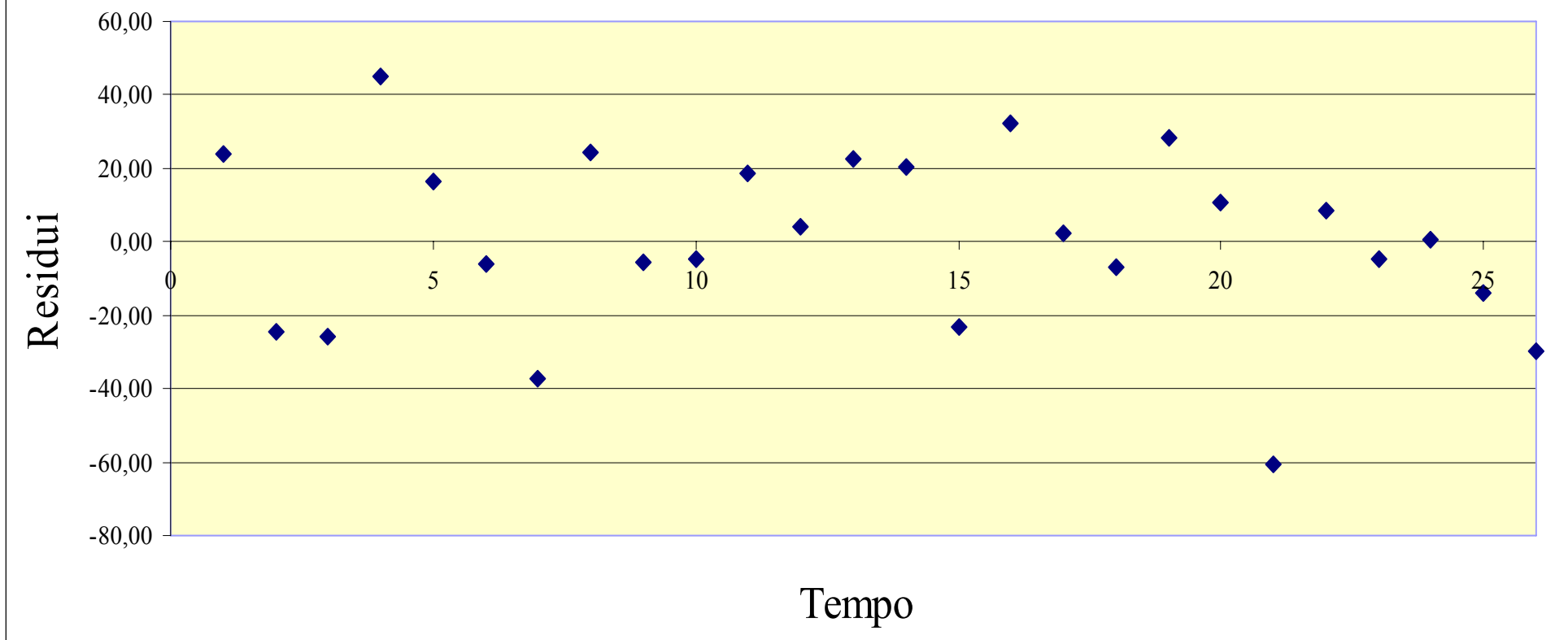
x <sub>ijk</sub> stimati	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	MediaT(A)
A <sub>1</sub>	134,75	57,25	57,50	83,17
A <sub>2</sub>	155,75	119,75	49,50	108,33
A <sub>3</sub>	144,00	145,75	85,50	125,08
MediaT(B)	144,83	107,58	64,17	105,53

Residui												
	B1				B2				B3			
A <sub>1</sub>	-4,75	20,25	-60,75	45,25	-23,25	-17,25	22,75	17,75	-37,50	12,50	24,50	0,50
A <sub>2</sub>	-5,75	32,25	3,25	-29,75	16,25	2,25	-13,75	-4,75	-24,50	20,50	8,50	-4,50
A <sub>3</sub>	-6,00	-34,00	24,00	16,00	28,25	-25,75	4,25	-6,75	10,50	18,50	-3,50	-25,50



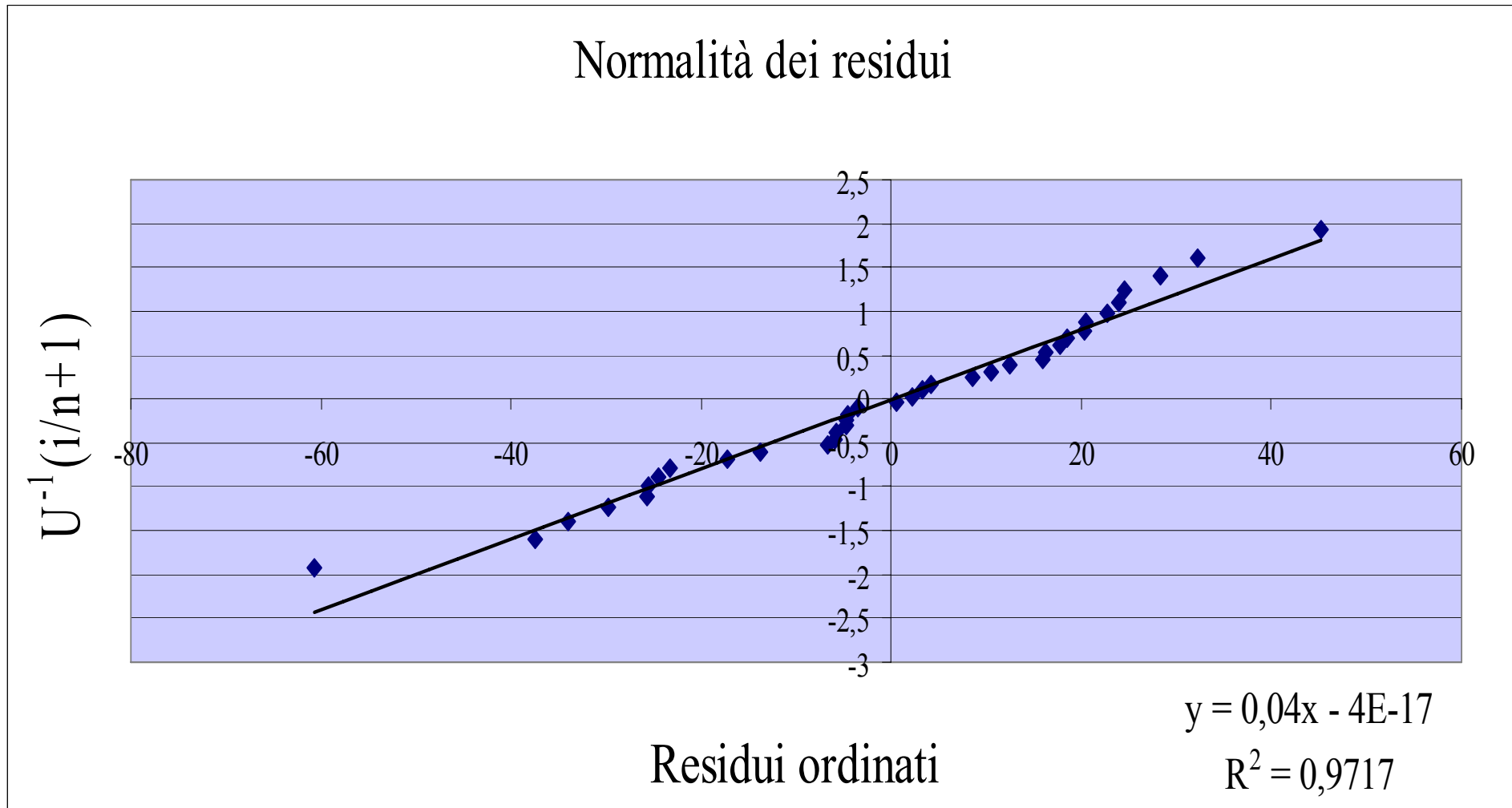
# ANOVA con interazione: verifica dell'indipendenza dei residui

Grafico dei residui rispetto al tempo



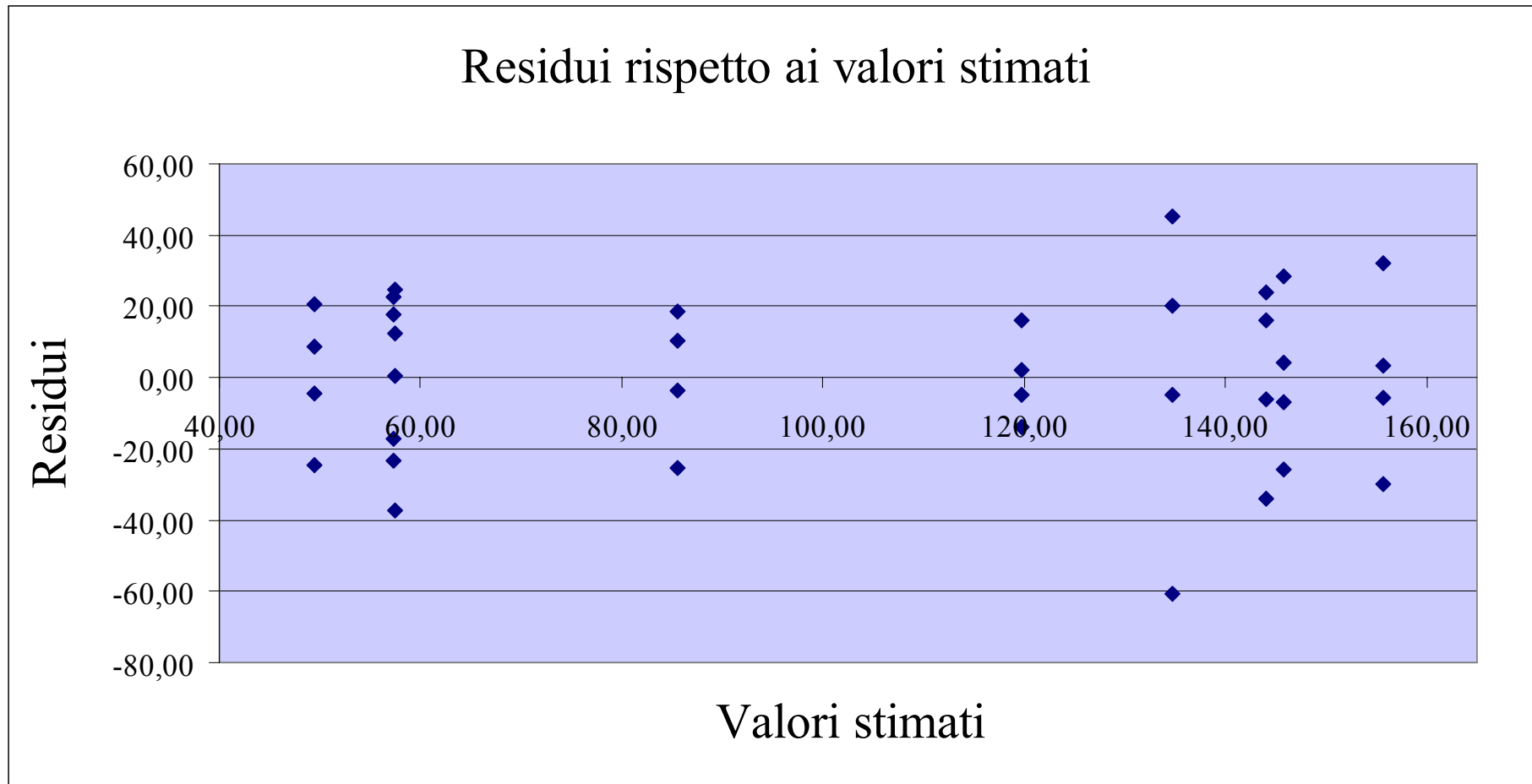


# ANOVA con interazione: verifica della normalità dei residui





# ANOVA con interazione: verifica dell'assunzione di residui non 'strutturati'



Dal grafico emerge un “lieve” aumento della varianza dei residui  
all’aumentare della durata della batteria



# Analisi della varianza con interazione: analisi

ANOVA						$\alpha = 0,05$		
Origine della varianza	SS	g.d.l.	MS	F0	Ftest	p-value	Esito	Effetto del Fattore
Fattore Principale	10683,7	2	5342	7,78	3,37	0,00225	Rigetto H0	Significativo
Fattore Secondario	39118,7	2	19559	28,49	3,37	0,00000	Rigetto H0	Significativo
Interazione	9613,78	4	2403	3,50	2,74	0,02050	Rigetto H0	Significativo
Errore	18536,75	27	686,5					
Totale	77952,97	35						

Poiché  $F_0 > F_{\text{test}}$  ( $p\text{-value} < \alpha$ ) in tutti e tre i casi, possiamo rigettare l'ipotesi nulla e concludere che l'effetto di A, l'effetto di B e quello dell'interazione AB sono significativi e quindi il modello assunto per descrivere il modello è corretto.



# ANOVA con interazione: i risultati

**Effetto Fattore A**

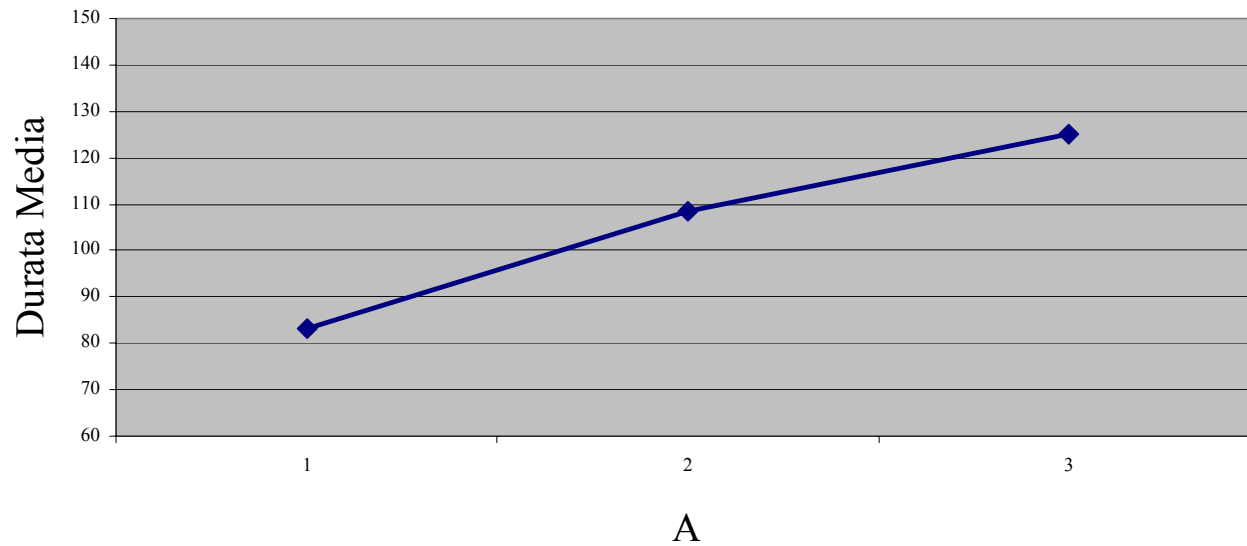
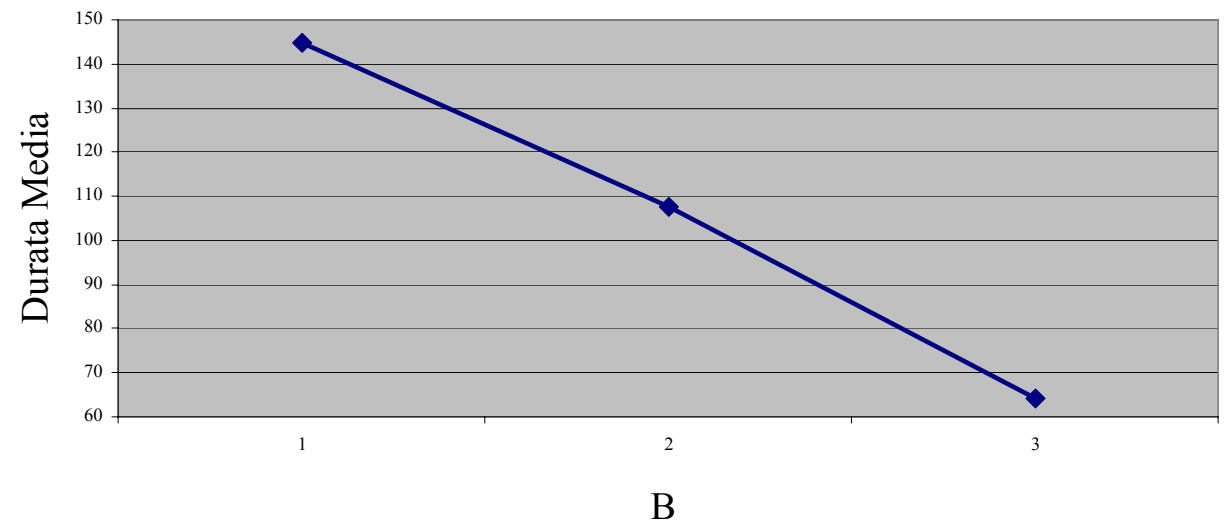


Grafico degli effetti dei fattori significativi: medie marginali della risposta ai livelli dei fattori significativi

**Effetto Fattore B**

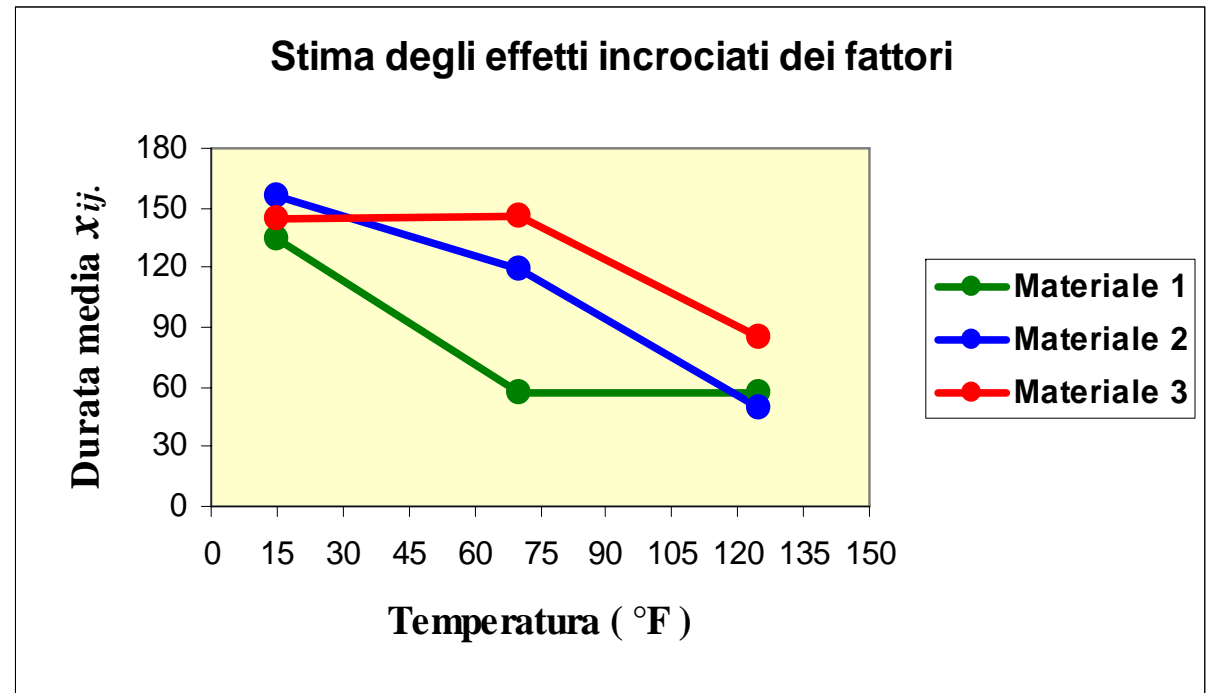




# ANOVA con interazione: i risultati

Grafico degli effetti incrociati:

L'assenza di parallelismo tra le spezzate evidenzia la significatività dell'interazione tra i fattori: notiamo che una durata media maggiore è assicurata dalla temperatura più bassa, indipendentemente dal tipo di materiale.



Se passiamo a temperature intermedie la durata aumenta solo per il **tipo 3** di materiale che è quello ottimale se l'obiettivo è massimizzare la **durata all'aumento della temperatura**.